

푸리에 해석과 등분포정리

김규동

KSA

September 26, 2025

목차

- 푸리에 급수란?
- 푸리에 급수는 왜 수렴하는가?
- 합성곱과 핵
- 페예르의 정리
- Weyl's criterion
- Van der Corput's theorem (대충)

- 푸리에 급수란?
- 푸리에 급수는 왜 수렴하는가?
- 합성곱과 핵
- 페예르의 정리
- Weyl's criterion
- Van der Corput's theorem (대충)

푸리에 급수란?

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

(f 는 2π 주기 함수)

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n + c_{-n}) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} (ic_n - ic_{-n}) \sin(nx)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

→ 어떤 주기함수를 삼각함수들의
합으로 분해해서 급수로 나타낸 것

간단한 역사

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{with } c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (u(x, t) = \text{시간 } t \text{ 때 위치 } x \text{ 에서 파동의 변위})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{with } D = \text{열확산도}, \quad (T(x, t) = \text{시간 } t \text{ 때 점 } x \text{ 에서의 온도})$$

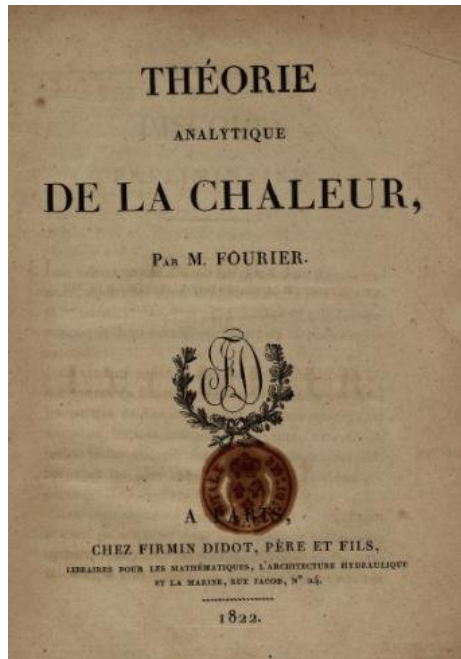
간단한 역사

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{with } c = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}}, \quad (u(x, t) = \text{시간 } t \text{ 때 위치 } x \text{ 에서 파동의 변위})$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \text{with } D = \text{열확산도}, \quad (T(x, t) = \text{시간 } t \text{ 때 점 } x \text{ 에서의 온도})$$

→ 푸리에 급수를 통해서 임의의 초기조건에 대한 해의 표현법을 얻음





목차

- 푸리에 급수란?
- 푸리에 급수는 왜 수렴하는가?
- 합성곱과 핵
- 페예르의 정리
- Weyl's criterion
- Van der Corput's theorem (대충)

푸리에 급수는 왜 수렴하는가?

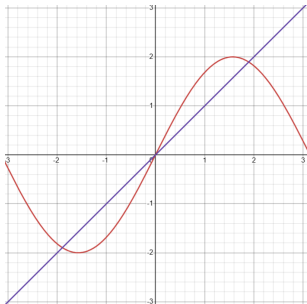


Figure: $n=1$

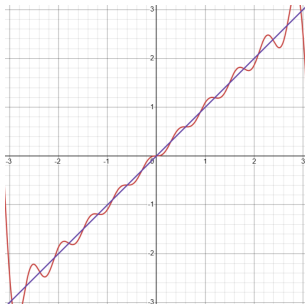


Figure: $n=10$

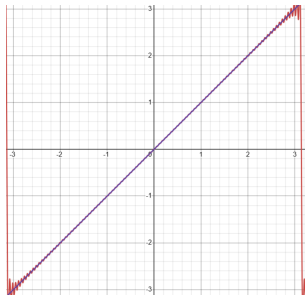
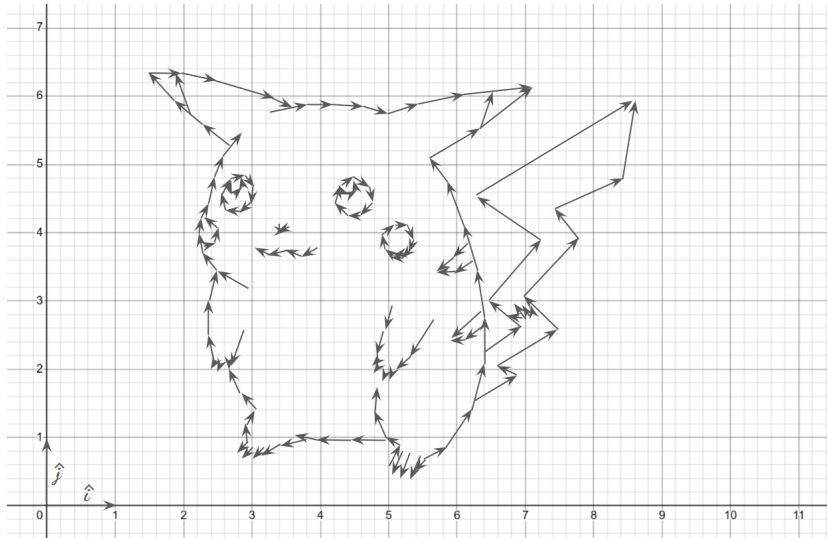


Figure: $n=100$

벡터?



벡터공간의 정의

벡터공간의 정의

다음 성질들을 만족하는 원소들의 집합을

체 K 위에서의 벡터공간 $(V, +, \cdot)$ 이라고 한다 (이때, 체는 그냥 우리가 일상적으로 쓰는 수들의 성질을 가진 집합 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ 같은 것들)

$-v, u, w \in V \rightarrow (v + u) + w = v + (u + w)$ (결합법칙)

$-v, u \in V \rightarrow u + v = v + u$ (교환법칙)

$-\exists 0 \in V s.t. v \in V \rightarrow v + 0 = v$ (항등원의 존재)

$-\exists w = -v \in V s.t. v \in V \rightarrow v + w = 0$ (역원의 존재)

$-c_1, c_2 \in K, v \in V \rightarrow (c_1 c_2)v = c_1(c_2 v)$ (스칼라 곱이 됨)

$-1 \cdot v = v$ ($v \in V$ 이고 1 이 K 의 곱의 항등원)

$-a \in K, v, u \in V \rightarrow a(v + u) = av + au$ (벡터 합에 대한 스칼라 곱의 분배)

$-a, b \in K, v \in V \rightarrow (a + b)v = av + bv$ (스칼라 곱에 대한 벡터 합의 분배)

내적공간의 정의

내적공간의 정의

체 K 위의 벡터공간 V 가 다음을 만족하면 내적공간(inner product space)이다
 v 와 u 의 내적을 $\langle v, u \rangle$ 로 표현한다. $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$

-conjugate symmetry(켈레 대칭성) $\rightarrow \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$ (K 가 $\mathbb{R}$ 이면 그냥 교환법칙)

-좌측 선형성 $\rightarrow \langle au + bw, v \rangle = a\langle u, v \rangle + b\langle w, v \rangle$

-양의 정부호성 $\rightarrow v \neq 0 \quad \langle v, v \rangle > 0$

함수의 내적

함수의 내적

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

함수의 내적

함수의 내적

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

어떤 구간 $[a,b]$ 에서 정의된 리만적분 가능한 함수들의 집합 $\mathcal{R}$ 에서 내적을 다음과 같이 정의했을 때 $\mathcal{R}$ 은 복소수체 위에서의 내적공간을 이룬다!

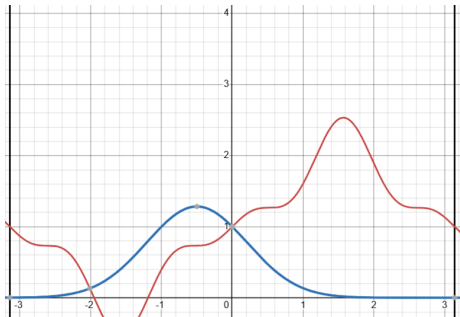
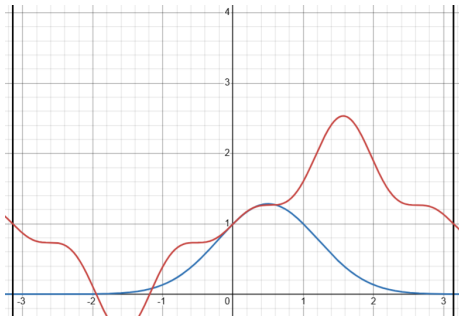
목차

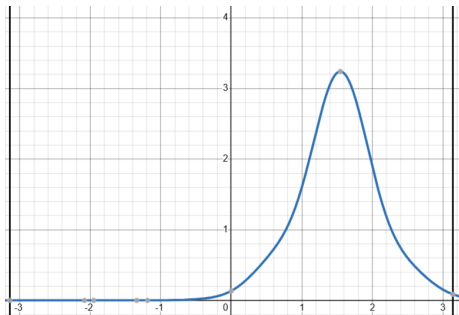
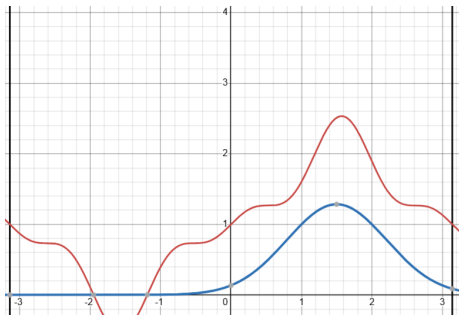
- 푸리에 급수란?
- 푸리에 급수는 왜 수렴하는가?
- **합성곱과 핵**
- 페예르의 정리
- Weyl's criterion
- Van der Corput's theorem (대충)

합성곱

2π 주기 함수들 f 와 g 에 대해 합성곱(*)을 다음과 같이 정의한다.

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$$





합성곱과 핵

합성곱의 성질들

2π 주기이며 적분가능한 함수 f 와 g 에 대해 합성곱이 다음 성질들을 만족한다.

$$(1) f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$$

$$(2) (cf) * g = c(f * g) = f * (cg) \quad \text{for any } c \in \mathbb{C}$$

$$(3) f * g = g * f$$

$$(4) (f * g) * h = f * (g * h)$$

$$(5) f * g \text{ is continuous}$$

$$(6) \widehat{f * g}(n) = \hat{f}(n)\hat{g}(n)$$

핵(Kernel)?

핵(Kernel)? → 적분을 통해서 함수에 대한 정보를 뽑아내는 함수

Good Kernel

Good Kernel

다음과 같은 조건을 만족하는 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 들을 좋은 핵이라고 한다

(1) 모든 $n \geq 1$ 에 대해서

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$$

(2) $M > 0$ 이 $n \geq 1$ 인 모든 n 에 대해서 다음을 만족하게 존재한다,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M$$

(3) 모든 $\delta > 0$ 에 대해,

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

$\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 들이 좋은 핵들이고, f 가 적분가능하고 x 에서 연속이면,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(x) = f(x)$$

이고, 연속인 구간에는 균등하게 수렴한다.

증명

증명: 좋은 핵의 조건(1)로

$$\begin{aligned}(f * K_n)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y) dy - f(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) [f(x-y) - f(x)] dy\end{aligned}$$

이고, x 에서의 연속 조건으로 δ 범위를 잡고 구간을 나누자

$$\begin{aligned}|(f * K_n)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) [f(x-y) - f(x)] dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \delta} |K_n(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)| dy + \frac{2B}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy\end{aligned}$$

$$|(f * K_n)(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)| dy + \frac{2B}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy$$

여기서 좋은 핵의 조건(2)로 첫 번째 항은 바운드 $\times \epsilon$ 이고, 두 번째 항도 좋은 핵의 조건(3)으로 상수 $\times \epsilon$ 꼴이어서 결국 모든 ϵ 에 대해

$$|(f * K_n)(x) - f(x)| \leq C\epsilon$$

디리클레 핵

디리클레 핵

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

디리클레 핵

디리클레 핵

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} = \frac{\sin((N + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

$$(f * D_N)(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

목차

- 푸리에 급수란?
- 푸리에 급수는 왜 수렴하는가?
- 합성곱과 핵
- **페예르의 정리**
- Weyl's criterion
- Van der Corput's theorem (대충)

Fejér's Theorem

f 가 적분가능한 함수일 때, f 의 푸리에 급수는 f 가 연속인 모든 점 x 에서 f 로 체사로 합 가능하다. 또한, 만약에 한 구간에서 f 가 연속이면, f 의 푸리에 급수는 그 구간 내에서 f 에 균등하게 체사로 합 된다.

페예르의 정리(다른 형태)

Fejér's Theorem(다른 형태)

f 가 어떤 구간에서 적분가능하고 연속이면, $\forall \epsilon > 0$, 어떤 삼각다항식 $P(x)$ 가 존재해서 구간 내 모든 점에서 다음을 만족한다.

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon$$

즉, 임의로 그 구간 내에서 f 를 근사하는 삼각다항식이 존재한다. 그리고 그때 그 삼각다항식 P 는 f 의 부분 체사로 합입니다.

Fejér Kernel

Fejér Kernel

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N} = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

Fejér Kernel

Fejér Kernel

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N} = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

→페예르 핵은 좋은 핵!

Good Kernel

Good Kernel

다음과 같은 조건을 만족하는 $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 들을 좋은 핵이라고 한다

(1) 모든 $n \geq 1$ 에 대해서

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$$

(2) $M > 0$ 이 $n \geq 1$ 인 모든 n 에 대해서 다음을 만족하게 존재한다,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M$$

(3) 모든 $\delta > 0$ 에 대해,

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

Fejér Kernel은 좋은 핵

(1):

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N e^{inx} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = 1$$

(2):

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \geq 0$$

Fejér Kernel은 좋은 핵 (계속)

(3): $\delta > 0$ 를 잡고

$\sin^2(x/2)$ 가 구간 $\delta \leq |x| \leq \pi$ 에서 $\sin^2(x/2) \geq c_\delta$ 인 $c_\delta > 0$ 가 존재.

$$|\sin^2(Nx/2)| \leq 1$$

$$\begin{aligned}\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |F_N(x)| dx &= \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \left| \frac{1}{N} \frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)} \right| dx \\ &\leq \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{1}{Nc_\delta} dx \\ &= \frac{2(\pi - \delta)}{Nc_\delta}\end{aligned}$$

따라서 상수 $\times \frac{1}{N}$ 은 N 이 무한대로 감에 따라 0으로 간다.

페예르의 정리(다른 형태)

Fejér's Theorem(다른 형태)

f 가 어떤 구간에서 적분가능하고 연속이면, $\forall \epsilon > 0$, 어떤 삼각다항식 $P(x)$ 가 존재해서 구간 내 모든 점에서 다음을 만족한다.

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon$$

즉, 임의로 그 구간 내에서 f 를 근사하는 삼각다항식이 존재한다.

페예르의 정리(다른 형태)

Fejér's Theorem(다른 형태)

f 가 어떤 구간에서 적분가능하고 연속이면, $\forall \epsilon > 0$, 어떤 삼각다항식 $P(x)$ 가 존재해서 구간 내 모든 점에서 다음을 만족한다.

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon$$

즉, 임의로 그 구간 내에서 f 를 근사하는 삼각다항식이 존재한다.

삼각다항식은

$$\sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

폴의 함수

페예르의 정리(다른 형태)

Fejér's Theorem(다른 형태)

f 가 어떤 구간에서 적분가능하고 연속이면, $\forall \epsilon > 0$, 어떤 삼각다항식 $P(x)$ 가 존재해서 구간 내 모든 점에서 다음을 만족한다.

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon$$

즉, 임의로 그 구간 내에서 f 를 근사하는 삼각다항식이 존재한다.

→ 정리는 바이어슈트라스 근사정리의 삼각다항식 버전

목차

- 푸리에 급수란?
- 푸리에 급수는 왜 수렴하는가?
- 합성곱과 핵
- 페예르의 정리
- **Weyl's criterion**
- Van der Corput's theorem (대충)

등분포?

구간에서 $[0, 1)$ 수열 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 이 등분포 돼 있다는 것?

등분포?

구간에서 $[0, 1)$ 수열 $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ 이 등분포 돼 있다는 것?

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a, b)\}}{N} = b - a$$

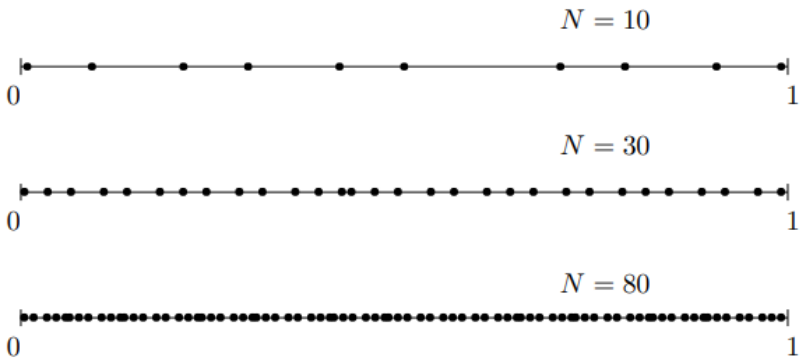


Figure: 등분포 되는 수열의 예시 (출처: 스타인 푸리에 해석학)

quiz) 다음 수열들은 구간 $[0,1)$ 에서 등분포 돼 있을까요?
($\langle x \rangle = x - [x]$, 즉 x 의 소수부분)

$$s_n = \left\langle \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\rangle$$

$$s_n = \langle \log n \rangle$$

$$s_n = \langle n\gamma \rangle \quad (\gamma \text{는 무리수})$$

Weyl's criterion

Theorem(Weyl's criterion)

실수열 $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 이 $[0, 1)$ 에서 등분포에 있는 것은 다음 식이 모든 $k \neq 0$ 에 대해 성립하는 것과 동치이다.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \xi_n} \rightarrow 0, \text{ as } N \rightarrow \infty$$

Weyl's criterion

Theorem(Weyl's criterion)

실수열 $\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ 이 $[0, 1)$ 에서 등분포에 있는 것은 다음 식이 모든 $k \neq 0$ 에 대해 성립하는 것과 동치이다.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \xi_n} \rightarrow 0, \text{ as } N \rightarrow \infty$$

사실 자명하긴 한데, 정말 그럴까?

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in (a,b), \\ 0 & \text{if } x \notin (a,b). \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\#\{1 \leq n \leq N : \xi_n \in (a,b)\}}{N} = b - a$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(\xi_n) = \int_0^1 \chi_{(a,b)}(x) dx$$

($\Rightarrow$)

Lemma

연속함수 f

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx, \text{ as } N \rightarrow \infty$$

by 페예르 정리

$$|f(x) - P(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

인 P 가 존재
by 가정

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \xi_n} \rightarrow 0, \text{ as } N \rightarrow \infty$$

$$\therefore \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(\xi_n) \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

또한

$$\int_0^1 e^{2\pi i k x} dx = 0 \Rightarrow \int_0^1 P(x) dx = 0$$

Lemma의 증명

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) - \int_0^1 f(x) dx \right| \\ = & \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(\xi_n) \right. \\ & + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(\xi_n) - \int_0^1 P(x) dx \\ & \left. + \int_0^1 P(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \end{aligned}$$

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) - \int_0^1 f(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |f(\xi_n) - P(\xi_n)| + \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P(\xi_n) - \int_0^1 P(x) dx \right| + \int_0^1 |P(x) - f(x)| dx$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

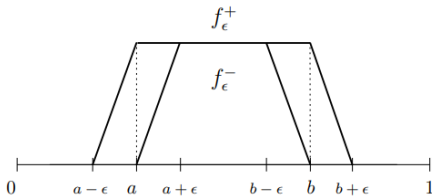


Figure: $\chi_{(a,b)}(x)$ 의 연속함수로 근사

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_{\epsilon}^{-}(n\gamma) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(\xi_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_{\epsilon}^{+}(n\gamma).$$

$\Downarrow$

$$b-a-2\epsilon \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(\xi_n), \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(\xi_n) \leq b-a+2\epsilon.$$

$$\therefore \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(\xi_n) = b-a$$

($\Leftarrow$)

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(\xi_n) \rightarrow b - a \text{ as } N \rightarrow \infty$$

Lemma

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx, \text{ as } N \rightarrow \infty$$

Lemma 증명

$$\bar{f}_M(x) = \chi_{I_m}(x) \sup_{x \in I_m} f(x) \quad \left(I_m = \left[\frac{m}{M}, \frac{m+1}{M} \right) \right)$$

$$f_{-M}(x) = \chi_{I_m}(x) \inf_{x \in I_m} f(x) \quad \left(I_m = \left[\frac{m}{M}, \frac{m+1}{M} \right) \right)$$

$$f_{-M}(x) \leq f(x) \leq \bar{f}_M(x)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f_{-M}(\xi_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{f}_M(\xi_n)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \chi_{I_m}(\xi_n) \sup_{x \in I_m} f(x) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^{M-1} \chi_{I_m}(\xi_n) \inf_{x \in I_m} f(x)$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \sup_{x \in I_m} f(x) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{I_m}(\xi_n) \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) \leq \sum_{m=0}^{M-1} \inf_{x \in I_m} f(x) \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \chi_{I_m}(\xi_n)$$

$$\downarrow \text{as } N \rightarrow \infty$$

$$\frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \sup_{x \in I_m} f(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) \leq \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \inf_{x \in I_m} f(x)$$

$$\downarrow \text{as } M \rightarrow \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(\xi_n) = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\therefore \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k \xi_n} \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

$\{n\gamma\}$ 의 등분포는 Weyl Criterion으로 증명된다.

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n \gamma} = \frac{e^{2\pi i k \gamma}}{N} \frac{1 - e^{2\pi i k N \gamma}}{1 - e^{2\pi i k \gamma}}$$

$e^{2\pi i k \gamma} \neq 1$ 이므로

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{2\pi i k n \gamma} \right| \leq \left| \frac{1}{N} \frac{2e^{2\pi i k \gamma}}{1 - e^{2\pi i k \gamma}} \right| \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

목차

- 푸리에 급수란?
- 푸리에 급수는 왜 수렴하는가?
- 합성곱과 핵
- 페예르의 정리
- Weyl's criterion
- **Van der Corput's theorem (대충)**

Van der Corput's theorem

Van der Corput's theorem

$\langle \xi_{n+h} - \xi_n \rangle$ 이 등분포에 있다면, $\langle \xi_n \rangle$ 도 등분포이다.

Van der Corput's inequality

$$S_N = \sum_{n=1}^N e^{2\pi i f(n)}$$

$$|S_N|^2 \leq c \frac{N}{H} \sum_{h=0}^H \left| \sum_{n=1}^{N-h} e^{2\pi i (f(n+h) - f(n))} \right|$$

corollary1

$\langle n^2 \gamma \rangle$ 이 등분포된다 (γ 는 무리수)

corollary2

$\langle f(n) \rangle$ 이 등분포된다 (γ 는 무리수) ($f(n)$ 는 상수항이 아닌 계수 중 무리수가 있는 임의의 다항식)

감사합니다

